3°) a) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^5-1=(z-1)\left[z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right]\left[z^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z+1\right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4°) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5°) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

EXERCICE N°3 : 30' 4,5 points

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1°) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres , tente de choisir un microscope fonctionnel ;il réalise l'épreuve suivante :
Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité .
• Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
• Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.
Soit A_n l'évènement :« le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{iéme}}$ choix »
et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n\leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2

c) Montrer que $p_3=\frac{7}{120}$ et que $p_4=\frac{1}{120}$.

2°) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

3°) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y\leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années . Exprimer $p(Y\leq T)$ en fonction de λ et T.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y\geq 5)=0,7$.

c) On prend $\lambda=0,071$.

Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn